Градиент поля скорости – тензор-диада

$$\nabla \otimes \vec{v} = grad\,\vec{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\},\ i,k = 1,2,3$$

Свертка градиента поля скорости , иначе – скалярное произведение или дивергенция скорости

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \equiv div\,\vec{v}$$

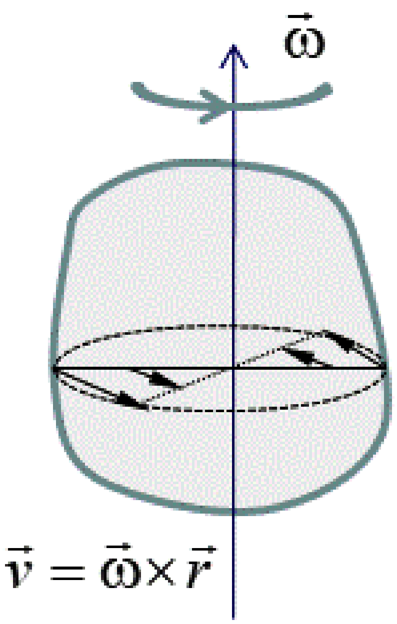
дивергенция – divergentio (лат) - расхождение

Поля физических величин. Элементы теории поля

Вихрь поля скорости *или* **ротор (rotor, swirl)** скорости

$$\nabla \times \vec{v} = rot\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$\left|\nabla \times \vec{v}\right|_i = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k\right)$$

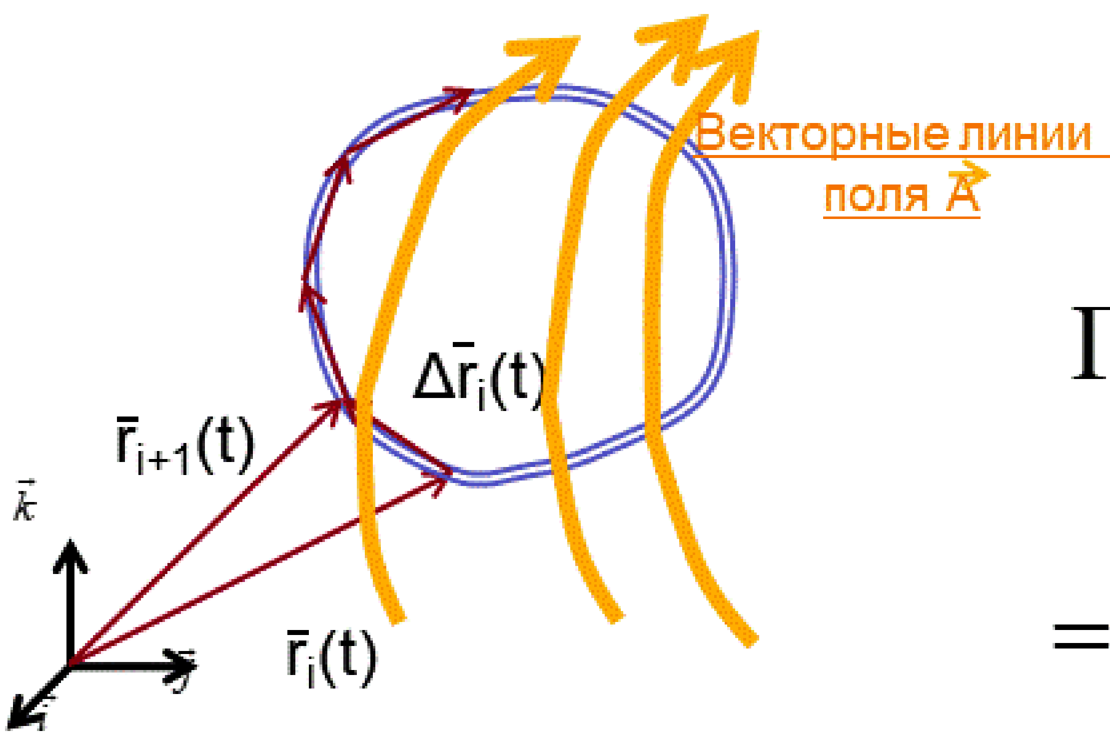


$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$= \vec{i}_1\left(\frac{\partial}{\partial x_2} v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} v_2\right) + \vec{i}_2\left(\frac{\partial}{\partial x_3} v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} v_3\right) + \vec{i}_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} v_1\right) =$$

$$= \vec{i}_1 (rot\,\vec{v})_1 + \quad \vec{i}_2 (rot\,\vec{v})_2 + \quad \vec{i}_3 (rot\,\vec{v})_3$$

Циркуляция векторного поля по <u>замкнутому</u> контуру



Циркуляция <u>скорости</u> определяет подъемную силу контура

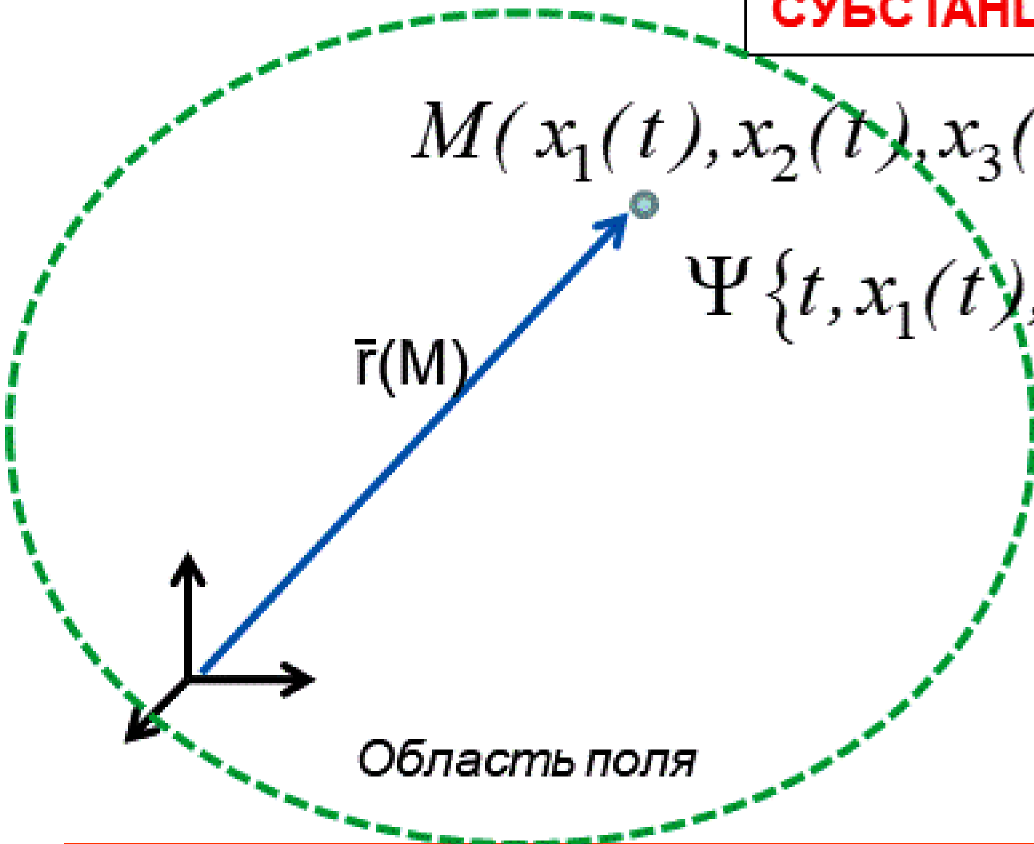
$$P = \rho v_\infty \Gamma$$

Циркуляция <u>силы</u> по контуру - работа силы $\quad A(\vec{F}) \equiv \Gamma(\vec{F})$

$$\Gamma \equiv \sum_i \vec{A}_i\, \Delta\vec{r}_i = \oint_L \vec{A}\, d\vec{r} =$$

$$= \oint_L (A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + A_3\, dx_3)$$

СУБСТАНЦИОНАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПОЛЯ



$$grad\Psi \equiv \nabla\Psi \equiv \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}, \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}, \frac{\partial\Psi}{\partial x_3}\right\}$$

$$\vec{v} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right)$$

$$\frac{D\Psi(t,x_1(t),x_2(t),x_3(t))}{Dt} \equiv \frac{\partial\Psi(t,x_1(t),x_2(t),x_3(t))}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} =$$

$$= \frac{\partial\Psi(t,x_1(t),x_2(t),x_3(t))}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\Psi =$$

$$= \frac{\partial\Psi}{\partial t} + (\vec{v}\cdot grad)\Psi = \text{локальная} + \text{конвективная производные от } \Psi$$

$$\text{УСКОРЕНИЕ}: \quad \frac{D\vec{v}(t,x_1(t),x_2(t),x_3(t))}{Dt} \equiv \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} =$$

$$= \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot grad)\vec{v}$$