Модуль 2. Гідродинаміка

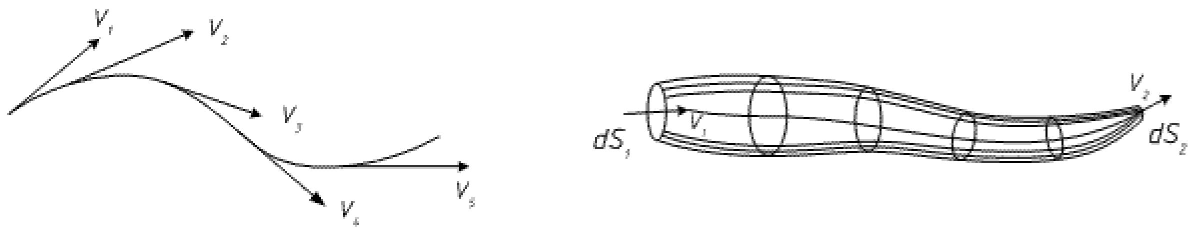
Гідродинаміка - це розділ гідравліки, в якому вивчаються закони руху рідини та її взаємодія з нерухомими і рухливими поверхнями.

Кінематика. Загальні відомості

Ідеальна рідина – це уявна рідина, абсолютно позбавлена в'язкості. У такій рідини можливий тільки один вид напруг - гідромеханічний тиск

Сталим називається рух рідини, незмінний за часом, при якому тиск і швидкість є функціями тільки координат, але не залежать від часу.

Лінією струму називається крива, в кожній точці якої вектор швидкості в даний момент часу спрямований по дотичній. При усталеному русі лінії струму і траєкторії збігаються. Якщо в рідині, що рухається, взяти нескінченно малий замкнутий контур і через всі його точки провести лінії струму, то утворюється трубчаста поверхня, звана ***трубкою струму***. Частина потоку, що міститься усередині трубки струму, називається ***елементарною струминкою***. При прагненні поперечних розмірів елементарного струмку до нуля він в межі стягується в лінію струму



Лінія струму (ліворуч) та елементарна струминка (праворуч)

Несталим називається рух рідини, всі характеристики якого (або деякі з них) змінюються за часом в точках розглянутого простору. Для несталого руху – $p = f_1(t, x, y, z)$; $\overline{V} = f_2(t, x, y, z)$

Живим перетином, або просто перетином потоку, називається в загальному випадку поверхня в межах потоку, проведена нормально до ліній струму. Розрізняють напірні і безнапірні течії рідини. ***Напірними*** називають течії в закритих руслах без вільної поверхні, а ***безнапірними*** - течії з вільною поверхнею. При напірних течіях тиск уздовж потоку зазвичай змінний, при безнапірному - постійний (на вільній поверхні) і найчастіше атмосферний.

Витратою називається кількість рідини, що протікає через живий перетин потоку (струминки) в одиницю часу.

- Об'ємний Q
- Ваговий Q_G
- Масовий G

Для елементарного струмка, можна вважати, що швидкість однакова у всіх точках перетину і тоді: $dQ = VdS$; $dG = \rho dQ = \rho VdS$.

Для потоку кінцевих розмірів: $\boxed{Q = \int_S VdS}$.

Якщо ввести середню за перетином швидкість $V_{cp} = Q/S$, то $Q = V_{cp}S$.

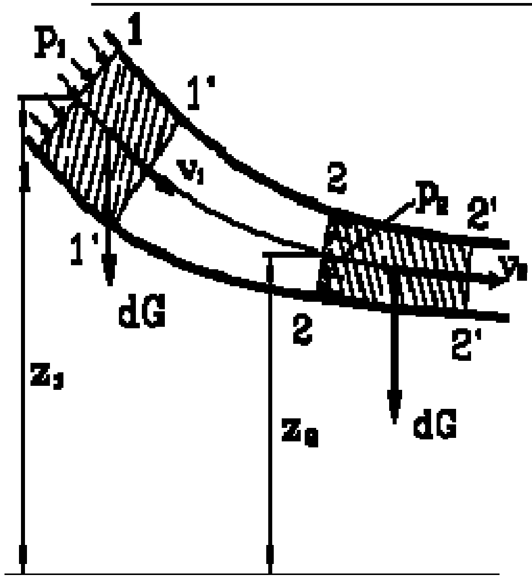
Ґрунтуючись на законі збереження речовини уздовж струмка:

$$dQ = V_1 dS = V_2 dS = ... = const .$$

$V_{1cp}S_1 = V_{2cp}S_2 = ... = const$. (рівняння нерозривності)

Середні швидкості в потоці нестисливої рідини обернено пропорційні площам перетинів: $\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_2}{S_1}}$.

Рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини



Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії

Робота сил тиску дорівнює добутку сили на шлях. Робота сил тяжіння дорівнює добутку різниці висот і сили тяжіння.

Зміна кінетичної енергії дорівнює різниці кінетичних енергій об'ємів рідини 1'-2' і 1-2

$$\Delta T = T_{1'-2'} - T_{1-2} = T_{1'-2} + T_{2-2'} - T_{1-1'} - T_{1'-2} =$$

$$= T_{2-2'} - T_{1-1'} = \frac{dm}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{dG}{2g}\left(V_2^2 - V_1^2\right).$$

Склавши роботи сил і прирівнявши до зміни кінетичної енергії

$$p_1 dS_1 V_1 dt - p_2 dS_2 V_2 dt + dG\left(z_1 - z_2\right) = \frac{dG}{2g}\left(V_2^2 - V_1^2\right)$$

З огляду на, що $dG = gdm = \rho g dW = \rho g \underbrace{Vdt}_{H} dS$ й $V_1 dS_1 = V_2 dS_2$, одержуємо

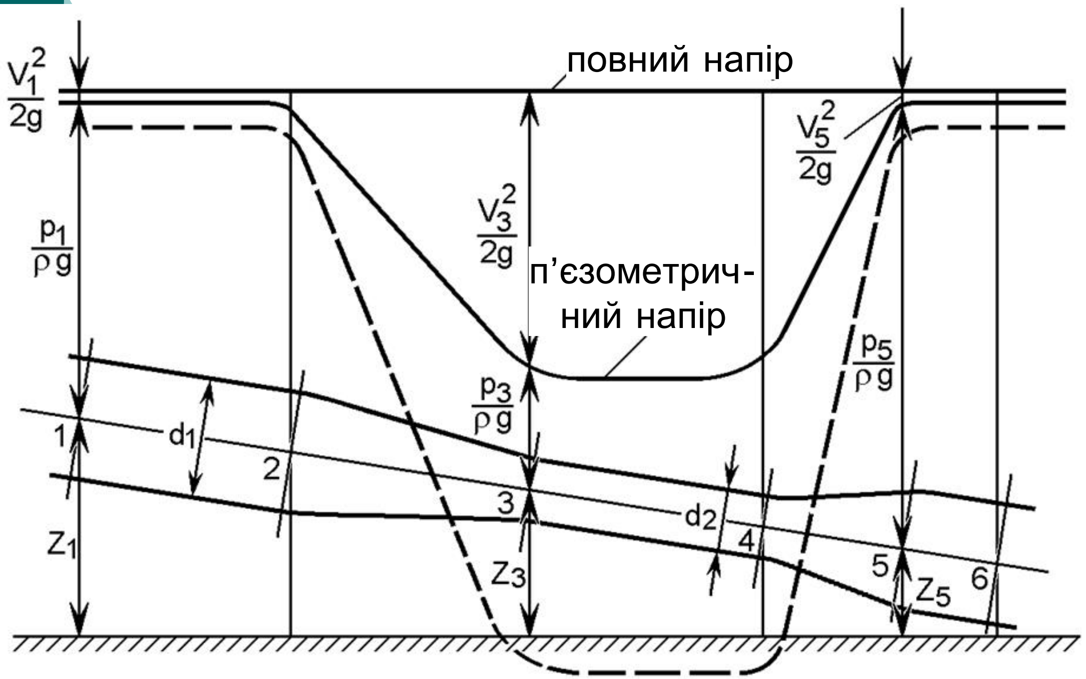
$$p_1\frac{dG}{\rho g} - p_2\frac{dG}{\rho g} + dG\left(z_1 - z_2\right) = \frac{dG}{2g}\left(V_2^2 - V_1^2\right); \ \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + \left(z_1 - z_2\right) = \frac{1}{2g}\left(V_2^2 - V_1^2\right).$$

Згрупуємо члени за перетинами:

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} = H\,,} \qquad (*)$$

де z – геометрична висота, або геометричний напір; $\frac{p}{\rho g}$ – п'єзометрична висота або напір; $\frac{V^2}{2g}$ – швидкісна висота або напір.

Для ідеальної рідини, що рухається, сума трьох напорів (висот): геометричного, п'єзометричного і швидкісного є величина постійна уздовж струминки.



Рівняння Бернуллі (*) записано для двох довільно взятих перетинів струмки і висловлює рівність повних напорів в цих перетинах.

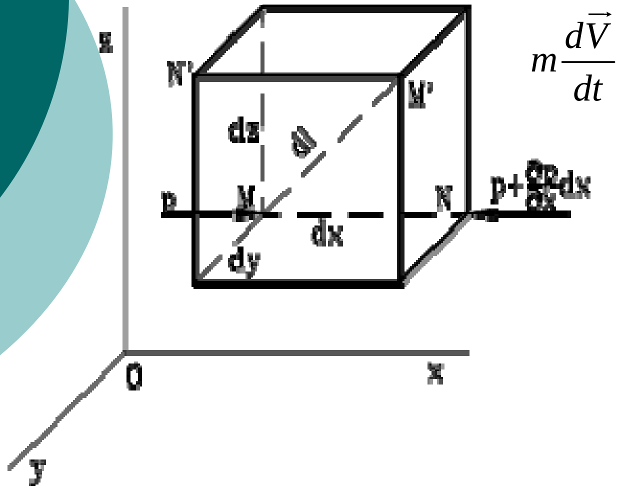
Лінія зміни п'єзометричних висот називається п'єзометричною лінією, її можна розглядати як геометричне місце рівнів в п'єзометрах, встановлених уздовж струминки

Зміна п'єзометричного і швидкісного напорів уздовж струминки ідеальної рідини

Енергетичний сенс рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини полягає в сталості уздовж струминки повної енергії рідини.

Диференціальні рівняння руху ідеальної рідини

В потоке идеальной жидкости возьмем произвольную точку M с координатами x, y, z и выделим у этой точки элемент жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда. Запишем второй закон Ньютона для выделенного объема жидкости:



$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1} \vec{F}_i$$

$$\rho\delta x\delta y\delta z\frac{dV_x}{dt} = X\rho\delta x\delta y\delta z - \frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$$

$$\rho\delta x\delta y\delta z\frac{dV_y}{dt} = Y\rho\delta x\delta y\delta z - \frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$$

$$\rho\delta x\delta y\delta z\frac{dV_z}{dt} = Z\rho\delta x\delta y\delta z - \frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}; \\ \dfrac{dV_y}{dt} = Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}; \\ \dfrac{dV_z}{dt} = Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Помножимо кожне з рівнянь на відповідні проекції елементарного переміщення, і складемо рівняння

$$V_x dt\frac{dV_x}{dt} + V_y dt\frac{dV_y}{dt} + V_z dt\frac{dV_z}{dt} = XV_x dt + YV_y dt + ZV_z dt - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}V_x dt - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}V_y dt - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}V_z dt$$

$$V_x dV_x + V_y dV_y + V_z dV_z = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho}\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)}_{dp}$$

$$d\left(\frac{V_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{V_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{V_z^2}{2}\right) = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho}dp$$

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}dp \xrightarrow{X=0,\ Y=0,\ Z=-g}$$

$$-gdz = d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}dp$$

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}dp + gdz = 0$$

$$\rho = const$$

$$d\left(\frac{V^2}{2} + \frac{1}{\rho}p + gz\right) = 0$$

$$\frac{V^2}{2} + \frac{1}{\rho}p + gz = const$$