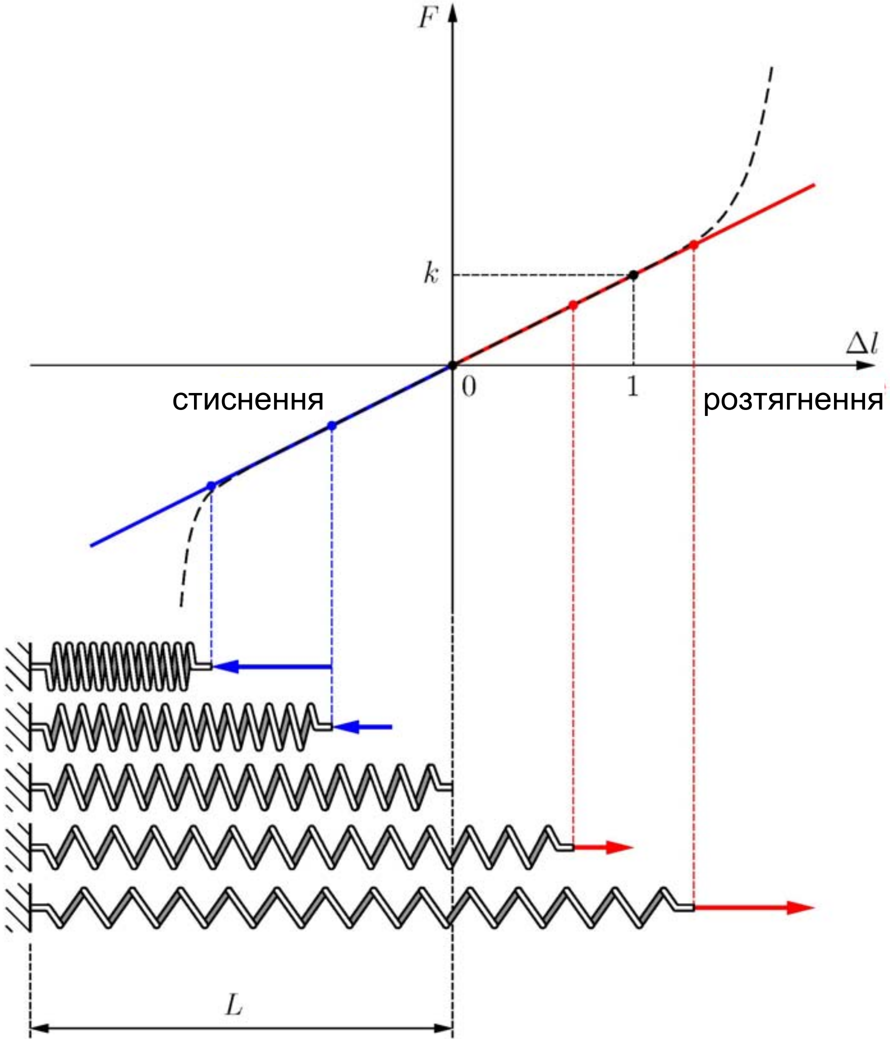
Лінійно пружна пружина як скінченний елемент



Закон Гука

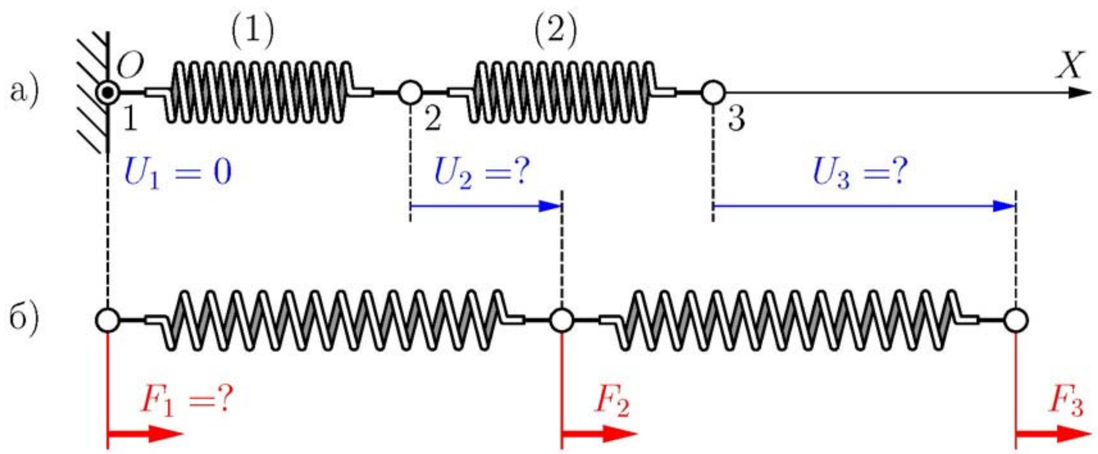
Лінійно пружна пружина – це механічне пристосування здатне сприймати тільки осьове навантаження й спроектоване таким чином, що, у певному робочому діапазоні (мається на увазі діапазон розтягання або стиснення з недеформованого стану) підкоряється закону Гука.

Закон Гука для пружини – сила (F), необхідна для розтягання або стиснення пружини на деяку відстань (Δl), прямо пропорційна цій відстані.

$$F = k\Delta l \,,$$

де k – коефіцієнт жорсткості (або коефіцієнт пружності) пружини. Він показує яку силу необхідно прикласти, щоб розтягти або стиснути пружину на одиницю довжини. Правило знаків: сила F й відстань Δl уважаються позитивними при розтяганні пружини, і негативними при стисненні.

Одновимірна пружинна конструкція



Пружинна конструкція (а - до додання навантаження; б - після прикладання навантаження)

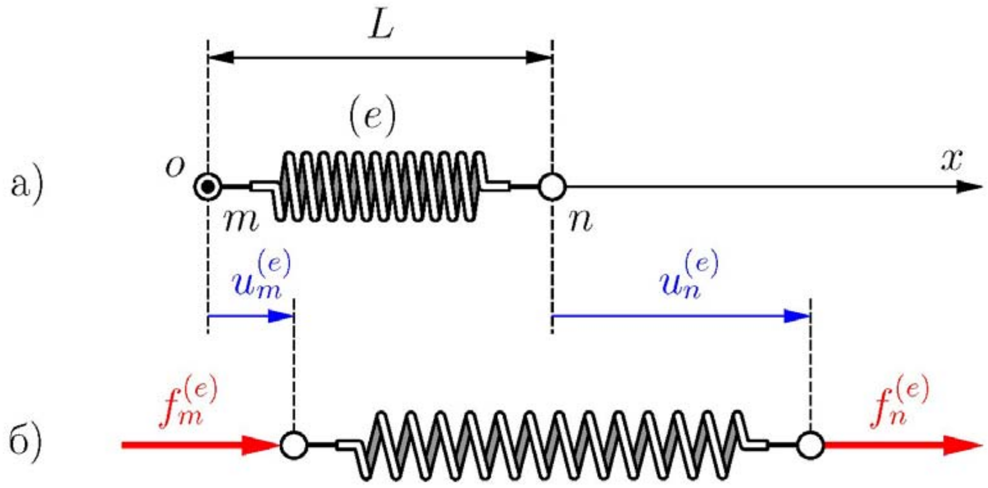
Крайні точки кожної пружини будемо називати ***вузлами***. На конструкцію можуть діяти зовнішні сили (F_i), але вони повинні бути прикладені тільки у вузлах і спрямовані тільки уздовж осі конструкції. Індекс i буде вказувати на номер вузла, у якому прикладена дана сила. Після додання зовнішнього навантаження конструкція повинна перебувати в стані спокою. При цьому вузли перемістяться в нове положення.

Глобальною системою координат будемо називати загальну для всієї конструкції систему координат. Тому що конструкція є одновимірною, то глобальна система координат буде мати одну вісь OX, спрямовану уздовж осі конструкції. ***Глобальні переміщення*** вузлів визначають ступені волі конструкції, тому що є незалежними між собою параметрами, які однозначно визначають положення конструкції в просторі. Кожному глобальному переміщенню вузла можна зіставити ***глобальну силу*** – це результуюча зовнішня сила або реакція опори, що прикладена в цьому ж вузлі й діє уздовж цієї ж осі глобальної системи координат. Якщо на який-небудь вузол не діє зовнішня сила, то глобальна сила в даному вузлі вважається рівною нулю.

Розрахунок одновимірної пружинної конструкції полягає у визначенні невідомих глобальних сил і переміщень вузлів конструкції.

Правило знаків: якщо напрямок заданої зовнішньої сили або заданого переміщення вузла збігається з позитивним напрямком осі OX, то їхнє значення підставляється в рішення зі знаком “+”, і навпаки. Невідомі сили й переміщення вузлів направляються в позитивному напрямку осі OX. Якщо в результаті рішення значення вийде негативним, це буде означати, що знайдені сила або переміщення спрямовані в протилежну сторону.

Пружинний скінченний елемент



Пружинний скінченний елемент (а — до додавання навантаження; б — після

Застосуємо закон Гука для пружинного елемента:

$$\boxed{f^{(e)} = k^{(e)} \Delta l^{(e)},}$$

де

а) $f^{(e)} = -f_m^{(e)} = f_n^{(e)}$. Відповідно до правила знаків сила $f_m^{(e)}$ береться зі знаком «-», тому що прагне стиснути елемент.

б) $k^{(e)}$ – коефіцієнт жерсткості елемента, що відповідає коефіцієнту жорсткості пружини;

в) $\Delta l^{(e)} = u_n^{(e)} - u_m^{(e)}$. Відповідно до правила знаків переміщення $u_m^{(e)}$ підставляється зі знаком «-», тому що приводить до стиснення елемента

Для проведення розрахунку кожну пружину конструкції можна представити у вигляді скінченного елемента, що назвемо **пружинним скінченним елементом.** ***Атрибути*** пружинного скінченного елемента: власна розмірність – $1D$; 2 крайніх вузли; геометрія – відрізок; ступінь волі – в одномірній постановці 2 осьові переміщення вузлів; визначальні співвідношення – закон Гука.

Локальною системою координат (ox) будемо називати систему координат пов'язану з елементом. Її центр o звичайно розташовується в одному з вузлів елемента, а вісь x завжди направляється вздовж осі елемента. Таким чином, кожен елемент буде мати свою локальну систему координат. Переміщення вузлів $\left(u_m^{(e)}, u_n^{(e)}\right)$ елемента стосовно його локальної системи координат будемо називати ***локальними.***

Локальними зусиллями $\left(f_m^{(e)}, f_n^{(e)}\right)$ будемо називати сили, прикладені у вузлах елемента уздовж його осі, які характеризують вплив іншої частини конструкції або опори на даний елемент. При вирішенні завдання замість верхнього індексу e будемо записувати номер елемента, а замість нижніх індексів m й n – підставляти номера вузлів.

Остаточно одержимо два рівняння, що описують взаємозв'язок локальних зусиль і переміщень:

$$f_m^{(e)} = -k^{(e)}\left(u_n^{(e)} - u_m^{(e)}\right);$$

$$f_n^{(e)} = k^{(e)}\left(u_n^{(e)} - u_m^{(e)}\right).$$

Дані рівняння називаються ***рівняннями рівноваги пружинного елемента.*** Для переходу до матричної форми запису перепишемо їх у вигляді:

$$f_m^{(e)} = k^{(e)}u_m^{(e)} - k^{(e)}u_n^{(e)};$$

$$f_n^{(e)} = -k^{(e)}u_m^{(e)} + k^{(e)}u_n^{(e)}.$$

У матричній формі дані рівняння приймуть вид:

$$\begin{Bmatrix} f_m^{(e)} \\ f_n^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(e)} & -k^{(e)} \\ -k^{(e)} & k^{(e)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_m^{(e)} \\ u_n^{(e)} \end{Bmatrix}.$$

Або в скороченій формі запису

$$\left\{ f^{(e)} \right\} = \left[k^{(e)} \right] \cdot \left\{ u^{(e)} \right\},$$

де $\left\{ f^{(e)} \right\}$ – вектор-стовпець локальних зусиль у вузлах елемента; $\left[k^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} k^{(e)} & -k^{(e)} \\ -k^{(e)} & k^{(e)} \end{bmatrix}$ – матриця жорсткості в локальній системі координат; $\left\{ u^{(e)} \right\}$ – вектор-стовпець локальних переміщень вузлів елемента.

Пружинний скінченний елемент

Матриця жорсткості є квадратною матрицею з розмірністю 2х2. Розмірність матриці жорсткості будь-якого елемента завжди відповідає кількості ступенів волі цього елемента. Матриця жорсткості є симетричної, тобто локальні переміщення можуть бути виражені друг через друга на підставі того самого фізичного явища (величина подовження або вкорочення пружини не залежить від того, який з вузлів буде закріплений, а до якого буде прикладена сила, що розтягує або стискає). Якщо в рівнянні локальні сили є відомими, то формальне вирішення даного рівняння щодо локальних переміщень буде мати вигляд

$$\left\{ u^{(e)} \right\} = \left[k^{(e)} \right]^{-1} \cdot \left\{ f^{(e)} \right\},$$

Однак зворотна матриця $\left[k^{(e)} \right]^{-1}$ не існує, тому що матриця жорсткості елемента є виродженою (сингулярною), тобто її визначник дорівнює нулю. Це означає, що, не маючи додаткової інформації, індивідуальні переміщення вузлів елемента визначити неможливо. Можна визначити лише різницю цих переміщень, що представляє із себе подовження або вкорочення елемента. Таким чином, переміщення вузлів можна визначити тільки в тому випадку, якщо одне з них задано.